Wektory

1 Prawo Coulomba mówi, że siła wzajemnego oddziaływania ładunków q i q' zlokalizowanych odpowiednio w punktach $\mathbf{r} = (a,\ b,\ c)$ i $\mathbf{r}' = (a',\ b',\ c')$ w próżni dana jest wzorem

$$\mathbf{F}_{\mathrm{q}} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,\mathbf{n}_{\mathrm{R}} \text{ niutonów,}$$

gdzie $\mathbf{n}_{\mathrm{R}}$ jest wektorem jednostkowym równoległym do prostej łączącej te dwa ładunki, R to odległość w metrach pomiędzy dwoma ładunkami, a ϵ_0 to przenikalność elektryczna próżni.

Oblicz tę siłę, wyrażając ją za pomocą współrzędnych obu ładunków.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

2 Prawo Coulomba mówi, że siła wzajemnego oddziaływania ładunków q i q' zlokalizowanych odpowiednio w punktach $\mathbf{r} = (a,\ b,\ c)$ i $\mathbf{r}' = (a',\ b',\ c')$ w próżni dana jest wzorem

$$\mathbf{F}_{\mathrm{q}} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,\mathbf{n}_{\mathrm{R}} \text{ niutonów,}$$

gdzie $\mathbf{n}_{\mathrm{R}}$ jest wektorem jednostkowym równoległym do prostej łączącej te dwa ładunki, R to odległość w metrach pomiędzy dwoma ładunkami, a ϵ_0 to przenikalność elektryczna próżni.

Znajdź wielkość i kierunek siły elektrostatycznej działającej na ładunek $-200\ \mu$C zlokalizowany w punkcie $(1,\ 2,\ 3)$, jeśli ładunek $30\ \mu$C znajduje się w punkcie $(0,\ 1,\ 1)$, a przenikalność elektryczna próżni wynosi $8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

3 Na wierzchołkach kwadratu o przekątnej 12 m umieszczono cztery równe ładunki o wielkości 20 μC. Znajdź siłę działającą na ładunek 100 μC umieszczony w punkcie P znajdującym się 8 m nad środkiem kwadratu, wiedząc, że siła wzajemnego oddziaływania ładunków q i q' zlokalizowanych odpowiednio w punktach $\mathbf{r} = (a,\ b,\ c)$ i $\mathbf{r}' = (a',\ b',\ c')$ w próżni dana jest wzorem

$$\mathbf{F}_{\mathrm{q}} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,\mathbf{n}_{\mathrm{P}} \text{ niutonów,}$$

gdzie $\mathbf{n}_{\mathrm{P}}$ jest wektorem jednostkowym równoległym do prostej łączącej te dwa ładunki, R to odległość w metrach pomiędzy dwoma ładunkami, a ϵ_0 to przenikalność elektryczna próżni, która wynosi w przybliżeniu $10^{-9}/36\pi$ F/m.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

4 Niech $\mathbf{S}$ będzie wektorem sinusoidalnie zmiennym w czasie i niech $\hat{\mathbf{S}}$ będzie wektorem wskazowym $\mathbf{S}$. Wykaż, że RMS (średnia kwadratowa wartość) $\mathbf{S}$ dana jest wzorem

$$S_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{S}}^*}.$$

Wskazówka: Średnia czasowa sinusoidalnego sygnału $Ae^{i\omega t}$ dana jest jako

$$\langle A\rangle = \frac{\displaystyle\int_0^T Ae^{i\omega t}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^T \mathrm{d}t}, \text{ gdzie } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

oraz

$A_{\mathrm{RMS}} = \sqrt{\langle A^2\rangle}$ jest średnią kwadratową wartością A.

Rozwiązanie

5 Siła $\mathbf{F}_1 = 4\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$ działa w punkcie $(5,\ 3,\ 1)$, a siła $\mathbf{F}_2 = -6\,\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ działa w punkcie $(-1,\ 0,\ 2)$.

(a) Znajdź całkowity moment $\mathbf{M}$ dwóch sił względem punktu $(-2,\ 0,\ 1)$.

(b) Znajdź długość wektora $\mathbf{M}$.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

Odpowiedzi

1 $$\mathbf{F}_{\mathrm{q}} = \frac{qq'\Big([a-a']\mathbf{i} + [b-b']\mathbf{j} + [c-c']\mathbf{k}\Big)}{4\pi\epsilon_0\Big([a-a']^2 + [b-b']^2 + [c-c']^2\Big)^{3/2}}$$

Pytanie Rozwiązanie

2 Wielkość 8,988 niutonów (z dokładnością do trzech miejsc po przecinku) w kierunku $\mathbf{n}_{\mathrm{R}} = \Big(-1/\sqrt{6},\ -1/\sqrt{6},\ -2/\sqrt{6}\Big)$.

Pytanie Rozwiązanie

3 $0{,}9\mathbf{n}_{\perp}$, gdzie $\mathbf{n}_{\perp}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do powierzchni kwadratu.

Pytanie Rozwiązanie

5 (a) $3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$
(b) $3\sqrt{2}$

Pytanie Rozwiązanie

Rozwiązania

1
$$\mathbf{n}_{\mathrm{R}} = \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\Big([a-a']\mathbf{i} + [b-b']\mathbf{j} + [c-c']\mathbf{k}\Big)}{\Big([a-a']^2 + [b-b']^2 + [c-c']^2\Big)^{1/2}},$$

oraz

$$R^2 = [a-a']^2 + [b-b']^2 + [c-c']^2.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\mathrm{q}} &= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{n}_{\mathrm{R}} \\ &= \frac{qq'\Big([a-a']\mathbf{i}+[b-b']\mathbf{j}+[c-c']\mathbf{k}\Big)}{4\pi\epsilon_0\Big([a-a']^2+[b-b']^2+[c-c']^2\Big)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Pytanie **Odpowiedź**

2

$\mathbf{F}_{\mathrm{q}} = \dfrac{qq'}{4\pi\epsilon_0 R^2}\mathbf{n}_{\mathrm{R}}$, zatem

$$\begin{aligned}|\mathbf{F}_{\mathrm{q}}| &= \left|\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 R^2}\mathbf{n}_{\mathrm{R}}\right| = \frac{|q||q'|}{4\pi\epsilon_0 R^2}|\mathbf{n}_{\mathrm{R}}| \\ &= \frac{|q||q'|}{4\pi\epsilon_0 R^2}.\end{aligned}$$

Skoro $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

$$\begin{aligned}&= [1-0]\mathbf{i} + [2-1]\mathbf{j} + [3-1]\mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k},\end{aligned}$$

to $R^2 = [1]^2 + [1]^2 + [2]^2 = 6$.

Konsekwentnie:

$$\begin{aligned}|\mathbf{F}_{\mathrm{q}}| &= \frac{|q||q'|}{4\pi\epsilon R^2} \\ &= \frac{200\cdot 10^{-6}\cdot 30\cdot 10^{-6}}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 6} \\ &= 8{,}988 \text{ niutonów (z dokładnością do trzech miejsc po przecinku).}\end{aligned}$$

Kierunek siły przyciągającej dany jest jako $-\mathbf{n}_{\mathrm{R}}$, gdzie

$$\begin{aligned}-\mathbf{n}_{\mathrm{R}} &= -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{(1,\ 1,\ 2)}{\sqrt{6}} \\ &= \Big(-1/\sqrt{6},\ -1/\sqrt{6},\ -2/\sqrt{6}\Big).\end{aligned}$$

Pytanie **Odpowiedź**

---

3 Wierzchołek kwadratu, środek kwadratu i punkt P to wierzchołki trójkąta prostokątnego o bokach pozostających w stosunku $3:4:5$. Ze względu na symetrię problemu, siła wypadkowa będzie prostopadła do płaszczyzny kwadratu. Wektor jednostkowy $\mathbf{n}_\perp$ w takim kierunku jest powiązany z wektorem jednostkowym łączącym wierzchołek kwadratu z punktem P, $\mathbf{n}_\mathrm{P}$, równaniem

$$\mathbf{n}_\perp = \left(\frac{4}{5}\right)\mathbf{n}_\mathrm{P}.$$

Zatem wiedząc, że wszystkie cztery ładunki mają taką samą wielkość i są oddalone o 10 m od punktu P:

$$\mathbf{F}_\mathrm{q} = 4 \cdot \frac{(100\cdot 10^{-6})(20\cdot 10^{-6})}{4\pi(10^{-9}/36\pi)10^2}\left(\frac{5}{4}\right)\mathbf{n}_\perp = 0{,}9\,\mathbf{n}_\perp \text{ niutonów.}$$

Pytanie Odpowiedź

4 Niech $\mathbf{S} = A\sin(\omega t+\alpha)\mathbf{i} + B\sin(\omega t+\beta)\mathbf{j} + C\sin(\omega t+\gamma)\mathbf{k}$, wówczas, jeśli $\langle\hat{\mathbf{S}}\rangle$ oznacza średnią czasową $\hat{\mathbf{S}}$ w pojedynczym okresie $T = 2\pi/\omega$, widzimy, że

$$S_{\mathrm{RMS}}{}^2 = \langle \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}\rangle = A^2\langle\sin^2(\omega t+\alpha)\rangle + B^2\langle\sin^2(\omega t+\beta)\rangle + C^2\langle\sin^2(\omega t+\gamma)\rangle.$$

Teraz:

$$\begin{aligned}
\langle\sin^2(\omega t+k)\rangle &= \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2(\omega t+k)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{2\pi/\omega}\mathrm{d}t}\\
&= \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi/\omega}[1-\cos 2(\omega t+k)]\,\mathrm{d}t}{2\pi/\omega}\\
&= \frac{\dfrac{1}{2}\left[t - \dfrac{\sin 2(\omega t+k)}{2\omega}\right]_0^{2\pi/\omega}}{2\pi/\omega}\\
&= \frac{\dfrac{1}{2}\left(2\pi/\omega - \dfrac{\sin 2k}{2\omega} + \dfrac{\sin(4\pi+2k)}{2\omega}\right)}{2\pi/\omega}\\
&= \frac{1}{2} \text{ ponieważ } \sin(4\pi+2k) = \sin 2k \text{ dla każdej wartości } k.
\end{aligned}$$

Zatem:

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{RMS}}{}^2 &= \langle \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}\rangle = A^2\langle\sin^2(\omega t+\alpha)\rangle + B^2\langle\sin^2(\omega t+\beta)\rangle + C^2\langle\sin^2(\omega t+\gamma)\rangle\\
&= \frac{1}{2}(A^2+B^2+C^2).
\end{aligned}$$

Ponadto

$$\hat{\mathbf{S}} = Ae^{i\alpha}\,\mathbf{i} + Be^{i\beta}\,\mathbf{j} + Ce^{i\gamma}\,\mathbf{k}, \text{ zatem } \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{S}}^* = A^2 + B^2 + C^2,$$

więc

$$S_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{S}}^*}.$$

Pytanie

---

5 (a) Niech $\mathbf{r}_1 = (5,\ 3,\ 1)$ i $\mathbf{r}_2 = (-2,\ 0,\ 1)$, wówczas $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (-7,\ -3,\ 0)$, zatem moment siły $\mathbf{F}_1$ względem punktu $(-2,\ 0,\ 1)$ obliczamy wg wzoru

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{F}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = (4,\ 3,\ -1) \times (-7,\ -3,\ 0).$$

Czyli:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 3 & -1 \\ -7 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3\,\mathbf{i} + 7\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k}.$$

Niech $\mathbf{r}_3 = (-1,\ 0,\ 2)$ i $\mathbf{r}_2 = (-2,\ 0,\ 1)$, wówczas $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (-1,\ 0,\ -1)$, zatem moment siły F_2 względem punktu $(-2,\ 0,\ 1)$ dany jest jako:

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{F}_2 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) = (0,\ -6,\ 7) \times (-1,\ 0,\ -1).$$

Czyli:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -6 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6\,\mathbf{i} - 7\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k}.$$

Zatem całkowity moment obu sił to:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = -3\,\mathbf{i} + 7\,\mathbf{j} + 9\,\mathbf{k} + 6\,\mathbf{i} - 7\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k} = 3\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{k}.$$

(b) Wielkość $\mathbf{M}$ to:

$$|\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Pytanie **Odpowiedź**
